

1-24

ISSN 0233-9293. VIBROTECHNIKA: Aukštųjų mokyklų mokslų darbų rinkinys. 1992. 67. 1-244.

67
mokslo darbai

Vibrotechnika

67 1992

0233-9293

после подстановки которого в (14) получим

$$P_B = \frac{\Phi^2 \pi^2 f^2 l}{\rho \pi l} \quad (17)$$

Учитывая, что $\Phi = BS_0$, $S_0 l = V$, $n = S_0/S_K$ (4), $d_K = b$, $S_K = \pi d_K^2/4$, выражение (17) примет вид

$$P_B = \frac{\pi^2}{4} \frac{B^2 f^2 b^2}{\rho} V. \quad (18)$$

Из сравнения (18) с общеизвестным (15) видно, что они отличаются постоянными коэффициентами. Потери на вихревые токи, определяемые по (18), будут больше на 33% по отношению к потерям, определяемым по (15).

Существенно, что исследователи, например в [3], указывают на увеличенное значение экспериментально измеренных потерь в листовой стали по отношению к расчетным на 30—50%. Это подтверждает целесообразность использования выведенных формул для мгновенных значений потерь в сердечниках.

Выводы. 1. На основании проведенных исследований предложено определять потери от вихревых токов по их мгновенным значениям, так как при этом экспериментальные данные наиболее согласуются с расчетными.

2. Использование выведенных зависимостей наиболее целесообразно при расчетах динамических процессов численными итерационными методами в сочетании с методами малого параметра.

Список использованной литературы

1. БЕССОНОВ Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник для электротехн., энерг., приборостроит. спец. вузов. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1986. 263 с.
2. ДОМБРОВСКИЙ В. В. Справочное пособие по расчету электромагнитного поля в электрических машинах. Л.: Энергоатомиздат, 1983. 256 с.
3. ШУЙСКИЙ В. П. Расчет электрических машин. Пер. с нем. М.: Энергия, 1968. 732 с.
4. НЕЙМАН Л. Р., ДЕМИРЧЯН К. С. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Энергоиздат, 1981. Т. 2. 316 с.
5. ЧУНИХИН А. А. Электрические аппараты (общий курс): Учебник для энергетич. и электротехнич. институтов и факультетов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1975. С. 62—64.
6. ТАММ И. Е. Основы теории электричества. 4-е изд. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1949. 627 с.
7. ЯВОРСКИЙ Б. М., ДЕТЛАФ А. А. Справочник по физике. М., 1964. С. 400—402.

Институт горючего дела

Поступило
02.11.1989

УДК 534:62-50

ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ. III. РАСЧЕТ СИСТЕМ С ПАРАМИ ТРЕНИЯ И КОСОГО УДАРА

Р. БАРАУСКАС

Формирование системы ограничений. Рассматривая косое соударение в контактной паре, учитываются силы не только нормального, но и тангенциального взаимодействия. Если силы тангенциального взаимодействия определяются по гипотезе сухого трения, проскальзывание в тангенциальном направлении не происходит, пока модуль этих сил не превышает критического значения, равного $k_f F_N$, где F_N — нормальная компонента силы взаимодействия, а k_f — коэффициент сухого трения.

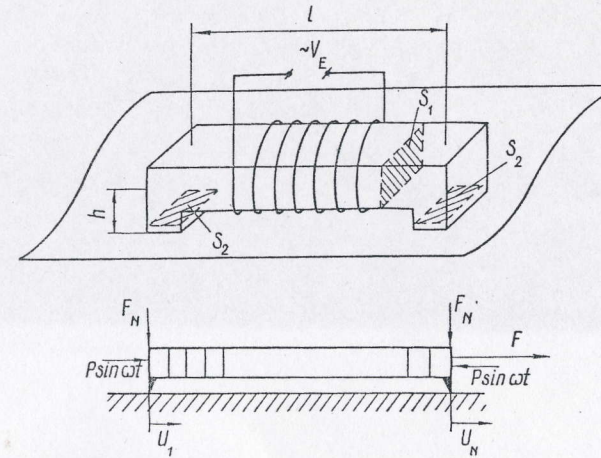


Рис. 1. УКП с ферритовым магнитострикционным вибропреобразователем: принципиальная схема и конечноэлементная модель

Воспользуемся рис. 1 и обозначениями из работы [2]. Разницу тангенциальных компонент скоростей точек i и j выразим в виде $[(\dot{u}_j - \dot{u}_i) \bar{\tau}_0] + \bar{\tau}_0 + [(\dot{U}_j - \dot{U}_i) \bar{b}_0] \bar{b}_0$, где \bar{n}_0 , $\bar{\tau}_0$, \bar{b}_0 — три взаимноперпендикулярных орта, причем \bar{n}_0 является единичным вектором нормали к площадке контактирования. Если проскальзы-

вания в тангенциальном направлении нет, скорости и ускорения точек системы должны удовлетворять ограничению

$$\begin{bmatrix} 000 & \dots & -\tau_x - \tau_y - \tau_z & \dots & \tau_x \tau_y \tau_z & \dots & 000 \\ 000 & \dots & -b_x - b_y - b_z & \dots & b_x b_y b_z & \dots & 000 \end{bmatrix} \dot{U} = 0, \quad l=1, 2. \quad (1)$$

Общая система кинематических ограничений имеет вид

$$\begin{cases} P_N U \leq d_0 \\ P_N \dot{U} = 0 \\ P_N \ddot{U} = 0 \end{cases} \quad (2.a)$$

$$\begin{cases} P_T \dot{U} = 0 \\ P_T \ddot{U} = 0, \end{cases} \quad (2.б)$$

где первые три соотношения (2.a) налагают ограничения на нормальные компоненты, а последние два (2.б) — на соответствующие тангенциальные компоненты перемещений, скоростей и ускорений точек контактных пар. В общем случае матрица

P_T состоит из двух подматриц $P_T = \begin{bmatrix} P_{T_a} \\ P_{T_b} \end{bmatrix}$, соответствующих

кинематическим ограничениям в двух взаимноперпендикулярных направлениях в тангенциальной плоскости, однако ниже для простоты рассмотрим двумерный случай, т. е. когда $P_{T_b} = 0$.

Если в качестве базовой схемы численного интегрирования используется обобщенный метод Ньюмарка второго порядка с $m=2$, нулевые правые части равенств в (2.a), (2.б) локальные соударения в контактных парах как в нормальном, так и в тангенциальном направлениях предполагаются абсолютно пластическими (см. [2]). В системе ограничений (2.a), (2.б) должны выполняться лишь те ограничения подсистемы (2.б), для которых появляющееся при этом тангенциальное усилие меньше своего критического значения $k_f F_N$. В противном случае величина тангенциальной силы равна $k_f F_N$, и выполнение соответствующих ограничений не требуется. Это означает, что строка матрицы P_T , соответствующая этому ограничению, должна быть удалена.

Приведение к системе с однозначной нелинейностью. Зависимость силы тангенциального взаимодействия от скорости взаимного тангенциального движения точек определяется по формуле

$$F_T = -k_f F_N \text{sign}(P_T \dot{U}), \quad (3)$$

где F_N , F_T — компоненты силы контактного взаимодействия в нормальном и тангенциальном направлениях. Используя выражение (3) для определения тангенциальной силы, система диф-

ференциальных уравнений с кинематическими ограничениями представляется в виде

$$\begin{aligned} M\ddot{U} + C\dot{U} + KU &= -P_T^T F_T + R(t) \\ P_N U &\leq d_0 \\ P_N \dot{U} &= 0 \\ P_N \ddot{U} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрирование системы (4) осуществляется по формулам, приведенным в табл. 2 работы [2], причем матричное алгебраическое уравнение, решаемое на каждом шаге, нелинейно и решается итеративно, см. табл. 1 работы [2]. Если же для описания контактного взаимодействия используются феноменологические модели, нормальные силы F_N выражаются через перемещения и скорости точек контактных пар и система (4) может быть сведена к виду

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = W(U, \dot{U}) + R(t) \quad (5)$$

(формулы численного интегрирования см. в табл. 1 [2]). Однако в случае $P_T \dot{U} = 0$ значения F_T по формуле (3) определяются неоднозначно. Это обстоятельство является причиной неустойчивости, которая проявляется осциллирующим поведением значений тангенциальной силы, когда разность тангенциальных компонент скоростей контактирующих точек близка к нулю.

Функция sign может быть аппроксимирована некоторой однозначной функцией, например, функцией $\frac{2}{\pi} \arctg[\alpha(\cdot)]$. Приближение тем лучше, чем больше значение α . Формула (3) в этом случае преобразуется к виду

$$F_T = -k F_N \frac{2}{\pi} \arctg(\alpha P_T \dot{U}). \quad (3')$$

Недостатком здесь является то, что при больших значениях α необходимо уменьшать шаг интегрирования.

Использование феноменологических моделей. При значении модуля тангенциальной силы, меньшем критического, вместо замены многозначного участка силовой характеристики трения (3) в виде (3') для определения величины тангенциальной силы могут быть использованы феноменологические модели. Аналогично расчету нормального контактирования [2] предполагается, что значения усилий на многозначном участке характеристики (3) обусловлены локальными тангенциальными деформациями и скоростями деформаций в контактной паре. Тангенциальные силы F_T в этом случае представляются линейными или более сложными функциями перемещений и скоростей точек контактной пары. Если феноменологическую модель в тангенциальном направлении представить в виде параллельно

соединенных упругого элемента с коэффициентом жесткости k_k и элемента вязкого трения с коэффициентом c_k , k -й элемент вектора тангенциальных усилий определяется в виде

$$f_{Tk} = \begin{cases} k_k P_{Tk}(U - U_0) + c_k P_{Tk} \dot{U} & \text{при } |f_{Tk}| < k_f f_{Nk}, \\ k_f f_{Nk} \operatorname{sign} [k_k P_{Tk}(U - U_0) + c_k P_{Tk} \dot{U}] & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6)$$

где f_{Nk} — сила нормального взаимодействия в k -й паре; U_0 — вектор узловых перемещений конструкции в момент начала контакта без скольжения в k -й паре.

Строго говоря, после отрыва точек контактной пары деформация феноменологической модели не становится мгновенно равной нулю. Для того чтобы точно описать этот процесс, нужно рассматривать дифференциальные уравнения движения феноменологической модели совместно с уравнениями движения упругой конструкции. Однако феноменологическая модель служит больше для представления тангенциальной силы в начальной фазе контактирования, а во время отсутствия контакта они могут и не иметь физического эквивалента. Поэтому выражение вида (6) практически используется во время контактирования без проскальзывания, а в случае начала скольжения или отрыва деформация феноменологической модели не рассматривается и принимается равной нулю. Уравнения движения феноменологической модели должны рассматриваться, если модель состоит из последовательно соединенных элементов. Тогда точки последовательного соединения дополняют число степеней свободы конструкции.

Существенным недостатком феноменологических моделей является то, что отсутствуют простые и надежные методы определения их коэффициентов. Поэтому эти коэффициенты обычно подбираются таким образом, чтобы получить решения уравнений по возможности близкими к процессу реального движения системы.

Применение метода множителей Лагранжа. Уравнения вида (11), (16) в работе [11] для дифференциальных уравнений динамики конструкции с кинематическими ограничениями (2.а), (2.б) записываются следующим образом:

$$\begin{cases} M \ddot{U} + C \dot{U} + KU + P_N^T \lambda_0 = R(t), \\ P_N U \leq d_0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} M \Delta \overset{(i)}{U} + P_N^T \lambda_i + P_T^T \mu_i = 0, \\ P_N \Delta \overset{(i)}{U} = -P_N \overset{(i)}{U}^-, \\ P_T \Delta \overset{(i)}{U} = -P_T \overset{(i)}{U}^-, \quad l = 1, 2. \end{cases} \quad (8)$$

Физическим смыслом множителей Лагранжа являются:

λ_0 — нормальные усилия, обеспечивающие совпадение положений контактных точек в момент времени $t + \Delta t$;

λ_2 — нормальные усилия, обусловленные скачком нормальных ускорений в момент контактирования;

λ_1 — импульсы нормальных усилий, обусловленные скачком скоростей в момент контактирования;

μ_2 — тангенциальные усилия, обусловленные скачком ускорений в момент контактирования;

μ_1 — импульсы тангенциальных усилий, обусловленные скачком скоростей в момент контактирования, если проскальзывания нет.

Если системы уравнений (7), (8) выполнены, во всех контактных парах проскальзывания нет. Если же в j -контактной паре имеет место проскальзывание, потребуем, чтобы тангенциальная сила имела бы критическое значение, в зависимости от значения соответствующей нормальной контактной силы, согласно закону сухого трения:

$$|\mu_l| = k_f \lambda_l, \quad l = 1, 2. \quad (9)$$

В таком случае система (8) преобразуется к виду

$$\begin{cases} M \Delta \overset{(i)}{U} + \hat{P}_N^T \lambda_l + \hat{P}_T^T \hat{\mu}_l = 0, \\ P_N \Delta \overset{(i)}{U} = -P_N \overset{(i)}{U}^-, \\ \hat{P}_T \Delta \overset{(i)}{U} = -\hat{P}_T \overset{(i)}{U}^-, \quad l = 1, 2, \end{cases} \quad (10)$$

где \hat{P}_N является матрицей P_N , в которой j -я строка P_{Nj} , соответствующая скользящей контактной паре j , заменена на строку $(P_{Nj} + k_f P_{Tj} \operatorname{sign} \mu_l)$, \hat{P}_T является матрицей P_T , из которой удалена j -я строка P_{Tj} , $\hat{\mu}_l$ является вектором μ_l , из которого удален j -й элемент μ_l . Обозначив $\begin{bmatrix} \hat{P}_N \\ \hat{P}_T \end{bmatrix} = \bar{P}$, $\begin{bmatrix} P_N \\ P_T \end{bmatrix} = \bar{P}$, $\begin{pmatrix} \lambda_l \\ \hat{\mu}_l \end{pmatrix} = \bar{\lambda}_l$, систему (10) представим в виде

$$\begin{cases} M \Delta \overset{(i)}{U} + \bar{P}^T \bar{\lambda}_l = 0, \\ \bar{P} \Delta \overset{(i)}{U} = -\bar{P} \overset{(i)}{U}^-, \quad l = 1, 2. \end{cases} \quad (11)$$

Выписывая соотношения вида (23) — (26) из работы [1] для системы уравнений (7), (11), получим формулы численного интегрирования

$$\begin{aligned} A \Delta U &= G - P_N^T \lambda_0, \\ U &= q_0^* + b_0^* \Delta U, \\ \overset{(i)}{U}^- &= q_i^* + b_i^* \Delta U, \\ \overset{(i)}{U} &= \overset{(i)}{U}^- - M^{-1} \bar{P}^T \bar{\lambda}_l, \\ \lambda_0 &= (P_N A^{-1} P_N^T)^{-1} (P_N A^{-1} G - d_0), \\ \bar{\lambda}_l &= (\bar{P} M^{-1} \bar{P}^T)^{-1} \bar{P} \overset{(i)}{U}^-, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как заранее неизвестно, в каких контактных парах имеет место проскальзывание, для определения перемещений в момент времени $t+\Delta t$ применяется следующий алгоритм.

Алгоритм.

$$1. \text{ Положить } \bar{P} = \bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} P_N \\ P_T \end{bmatrix}.$$

2. По формулам (12) определить значения множителей Лагранжа $\lambda_0, \lambda_l, \hat{\mu}_l, l=1, 2$, в момент времени $t+\Delta t$.

3. Определить векторы значений нормальных и тангенциальных импульсов усилий ограничений в виде

$$S_N = \frac{F_{N, t+\Delta t} + \lambda_0 + \lambda_{0, t+\Delta t}}{2} \Delta t + \lambda_{1, t+\Delta t}, \quad S_T = \hat{\mu}_{1, t+\Delta t},$$

а также векторы нормальных и тангенциальных усилий в момент времени $(t+\Delta t)$ в виде

$$F_{N, t+\Delta t} = \lambda_0 + \lambda_{0, t+\Delta t} + \lambda_{2, t+\Delta t}, \quad F_{T, t+\Delta t} = \hat{\mu}_{2, t+\Delta t}.$$

4. Удалить все строки матриц ограничений P_{Nj}, P_{Tj} , которым в момент времени $t+\Delta t$ соответствуют отрицательные значения $\lambda_{0j} < 0, S_{Nj} < 0$ либо $F_{Nj} < 0$.

5. Если хотя бы одно ограничение в п. 4 удалено, перейти к п. 1, вместо матриц P_N, P_T рассматривая матрицы с удаленными в п. 4 неактивными ограничениями.

В противном случае перейти к п. 6.

6. Отметить все строки ограничений j , для которых величина тангенциального импульса больше критической, т. е. выполнено неравенство $k_f |S_{Nj}| \leq |C_{Tj}|$.

7. Если ни одно из ограничений в п. 6 не отмечено, перейти к следующему шагу времени.

В противном случае перейти к п. 8.

8. Преобразовать матрицы ограничений к виду $\bar{P}, \bar{\bar{P}}$, учитывая ограничения, отмеченные в п. 6. Перейти к п. 2.

Расчетные формулы для одного шага интегрирования приведены в табл. Аналогично алгоритму интегрирования в табл. 2 из работы [2] численная схема может быть экономизирована, учитывая локальность ограничений.

Использование сложных силовых характеристик трения. Если характеристика трения, кроме кулоновой, содержит и другие составляющие, например, линейное или кубическое [3], целесообразно для учета кулоновой составляющей использовать односторонние ограничения (2.a), (2.б), а остальные составляющие представить в виде нелинейной непрерывной функции скоростей. Таким образом, задача сводится к матричному дифференциальному уравнению

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = V(\dot{U}) + R(t) \quad (13)$$

Формула численного интегрирования

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R(t)$$

$$P_N U \leq d_0$$

$$P_N \dot{U} = 0$$

$$P_T \dot{U} = 0$$

$$l=1, 2, \dots, m$$

существенно нелинейная система с ограничениями, критическое усилие тангенциального взаимодействия определяется законом сухого трения

$$1. q_l = \sum_{j=l}^m \dot{U} \frac{\Delta t^{j-1}}{(j-1)!}, \quad b_l = \beta_l \frac{\Delta t^m}{(m-1)!}, \quad b_l^* = b_l / b_0, \quad q_l^* = q_l - b_l^* q_0, \quad l=1, 2, \dots, m$$

$$2. \Delta U_{t+\Delta t} = G_{t+\Delta t}, \quad A = b_2^* M + b_1^* C + b_0^* K, \quad G_{t+\Delta t} = R_{t+\Delta t} - (Mq_2^* + Cq_1^* + Kq_0^*)$$

$$U = q_0^* + b_0^* \Delta U, \quad \dot{U}^- = q_1^* + b_1^* \Delta U, \quad \dot{U} = \dot{U}^- - M^{-1} \bar{P}^T \bar{\lambda}_l,$$

$$\lambda_0 = (P_N A^{-1} P_N^T)^{-1} (P_N A^{-1} G - d_0), \quad \bar{\lambda}_l = (\bar{P} M^{-1} \bar{P}^T)^{-1} \bar{P} \dot{U}^-$$

в парах со скольжением $\lambda_{lj} = \bar{\lambda}_{lj}, \mu_{lj} = k_f \bar{\lambda}_{lj}, \quad l=1, 2, \dots, m$

$$S_N = \frac{F_{N, t+\Delta t} + \lambda_0 + \lambda_{0, t+\Delta t}}{2} \Delta t + \lambda_{1, t+\Delta t}, \quad S_T = \mu_{1, t+\Delta t},$$

$$F_N = \lambda_0 + \lambda_{0, t+\Delta t} + \lambda_{2, t+\Delta t}, \quad F_T = \mu_{2, t+\Delta t},$$

итерация для отбора активных ограничений $\lambda_{0j} \geq 0, S_{Nj} \geq 0, F_{Nj} \geq 0$,

итерация для отбора пар, где имеет место скольжение по условию $k_f |S_{Nj}| \leq |S_{Tj}|$.

$$3. \dot{U}_{t+\Delta t} = q_l^* + b_l^* \Delta U_{t+\Delta t}, \quad l=1, 2, \dots, m$$

с ограничениями (2.a), (2.б), где $V(\dot{U})$ — сумма непрерывных слагаемых силовой характеристики трения. Для численного интегрирования такой системы используется приведенный в настоящей работе алгоритм, объединенный с формулами, приведенными в табл. 1 из работы [2].

Примеры численного расчета. 1. Исследование динамики шага микроперемещения управляемой контактной пары. Рассматриваемая управляемая контактная пара (УКП) представляет собой ферритовый магнитоstrictionный вибропреобразователь, двумя концевыми опорами опирающийся на ровную ферромагнитную поверхность (рис. 1). В тангенциальном направлении к вибропреобразователю приложена сила F , к концам обмотки подключено напряжение V_E , в результате которого по обмотке протекает ток

$$I(t) = I_c + I_a \sin \omega t. \quad (14)$$

Он состоит из постоянной составляющей I_c , которое создает нормальное усилие, притягивающее преобразователь к ферро-

магнитной поверхности, и из переменной составляющей, в результате которой вибропреобразователь совершает продольные колебания, а также одновременно варьирующей величину нормальной силы. Если переменная составляющая тока $I_a = 0$, сила F недостаточна для того, чтобы преодолеть силу трения между опорами и поверхностью и привести вибропреобразователь в движение. Если $I_a \neq 0$, в результате продольных колебаний вибропреобразователя под воздействием силы F начинается направленное в среднем скольжение по поверхности. Таким образом, путем возбуждения вибраций возможно управление скольжением, причем короткие пакеты импульсов возбуждения могут вызвать очень малые перемещения.

В результате расчета магнитной цепи получается величина нормального усилия, притягивающего вибропреобразователь к поверхности на каждом конце. Она зависит от величины тока и равна

$$F_N = \left(\frac{\mu I n}{\frac{IS_2}{S_1} + 2h} \right)^2 \frac{S_2}{2\mu_0}, \quad (15)$$

если принять, что расчет проводится на линейном участке кривой намагничивания материала (магнитная проницаемость $\mu = \text{const}$). Здесь n — число витков обмотки, μ_0 — магнитная постоянная. Чтобы определить эквивалентное магнитомеханическое усилие, действующее на каждом конце вибропреобразователя в продольном направлении, воспользуемся аналогией между составляющими уравнениями для пьезоэлектрических и магнитострикционных материалов. Так, для магнитострикционного материала эти уравнения имеют вид [4]

$$\begin{cases} \sigma_1 = c_{11}^H \varepsilon_1 - e_{M11} H_1, \\ M_1 = \frac{e_{M11}}{\mu_0} \varepsilon_1 + \kappa_{M11} H_1, \end{cases} \quad (16)$$

где σ_1 — механическое напряжение; ε_1 — механическая деформация; M_1 — намагниченность; H_1 — сила магнитного поля; c_{11}^H — модуль жесткости материала при постоянном магнитном поле; e_{M11} — пьезоэлектрический коэффициент; κ_{M11} — коэффициент магнитной восприимчивости. Матричное дифференциальное уравнение движения вибропреобразователя имеет вид

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = - \begin{bmatrix} F_N k_f \text{sign } \dot{u}_1 \\ \vdots \\ F_N k_f \text{sign } \dot{u}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ F - P_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ \vdots \\ -P \end{bmatrix} \sin \omega t. \quad (17)$$

Здесь матрицы системы получаются по формулам, приведенным в [5] для стержневого пьезоэлектрического вибропреобразователя, а силы P_1 , P , обусловленные постоянной и переменной составляющими силы магнитного поля, равны

$$\begin{aligned} P_1 &= H_c S_1 e_{M11}, \\ P &= H_a S_1 e_{M11}. \end{aligned} \quad (18)$$

Величины H_c и H_a представляют собой постоянную и амплитуду переменной составляющей силы магнитного поля и определяются по формулам

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{I_c n}{\mu_0 \left(l + \frac{2hS_1}{S_2} \right)}, \\ H_a &= \frac{I_a n}{\mu_0 \left(l + \frac{2hS_1}{S_2} \right)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Практически силу P_1 можно не рассматривать, поскольку обусловленная ею продольная деформация очень мала. Правосторонний вектор скачкообразных нелинейностей согласно изложенной в настоящей работе методике при отсутствии проскальзывания заменяется матричным ограничением в виде равенства (2.б), где $P_T = \begin{bmatrix} 1000 \dots 000 \\ 0000 \dots 001 \end{bmatrix}$. В этом случае не следует рассматривать ограничения вида (2а), так как движение в нормальном направлении не происходит, а временная зависимость нормальной силы F_N задана в виде (15).

Для анализа результатов используются безразмерные величины

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \bar{t} = t \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{mk}}, \quad \bar{N} = \frac{N}{P} \bar{\mu},$$

$$\bar{F} = \frac{F}{P} \bar{\mu}, \quad \bar{U} = \frac{U\mu}{P} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \dot{\bar{U}} = \frac{\dot{U}\mu}{P},$$

где

$$m = \frac{1}{3} \rho b h l, \quad k = \frac{4c_{11}^H b h}{l}, \quad \mu = \frac{1}{3} \nu b h l,$$

ρ , ν — плотность и пространственный коэффициент демпфирования материала вибропреобразователя.

Качество отработки одиночного шага в результате подачи пакета синусоидальных колебаний тока возбуждения зависит от нормальной силы \bar{F}_N , движущей силы \bar{F} и частоты колебаний $\bar{\omega}$. Расчеты показывают, что амплитудно-частотная характеристика имеет пик при резонансной частоте $\bar{\omega} = 1$, а оптимальными значениями сил является $\bar{F}_N k_f = 0,019$, $\bar{F} = k_f \cdot \bar{F}_N / 2$.

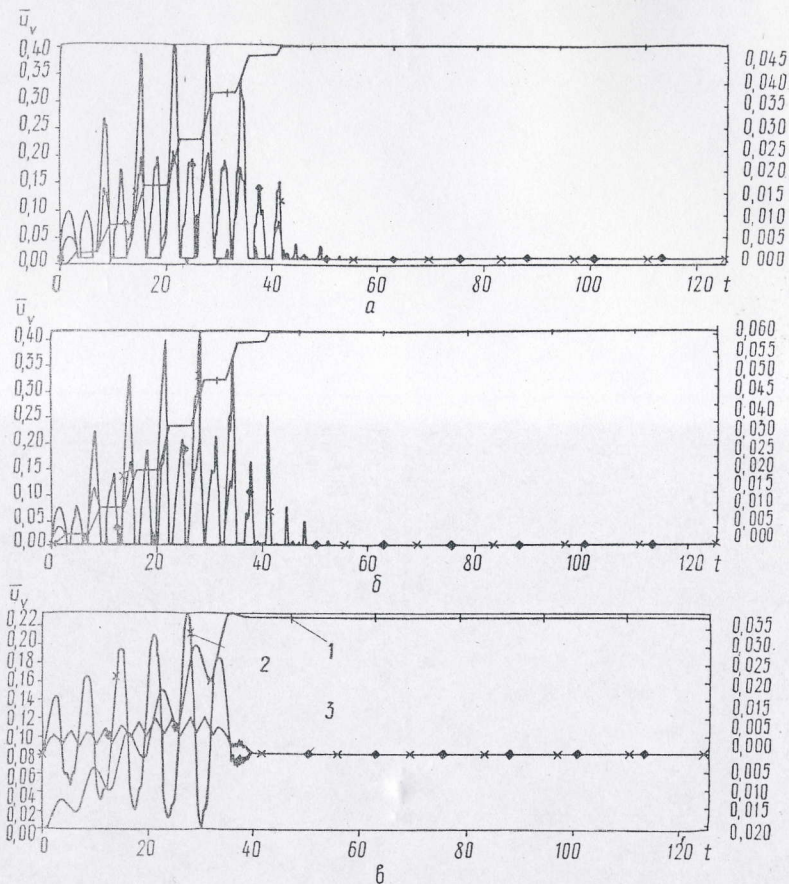


Рис. 2. Временные зависимости перемещений и скоростей правого конца вибропреобразователя УКП при значениях безразмерных параметров $F_N k_f = 0,019$, $\bar{F} = \frac{\bar{F}_N k_f}{2}$, $\bar{\omega} = 1$: а — 1 КЭ; б — 10 КЭ; в — 20 КЭ; 1 — U_N ; 2 — \dot{U}_N ; 3 — $\frac{\dot{U}_1 + U_N}{2}$ средняя скорость вибропреобразователя

На рис. 2 показаны временные зависимости перемещения и скорости правого конца преобразователя в безразмерной форме при возбуждении пятью периодами синусоидальной силы $P = \mu \sin \omega t$, используя модель из одного конечного элемента (КЭ). Анализ результатов показывает лишь качественное сходство движения простейшей модели рис. 2а с движением более сложных. В рассматриваемой системе вклады высших мод (рис. 2б, в) улучшают динамические характеристики УКП, так как величина шага здесь получается больше, а скорость получается неотрицательной на всем промежутке движения. Расчеты

эти проводились, предполагая, что модуляция нормальной силы отсутствует, т. е. при $F_N = \text{const}$. Уравнения (17) записывались для случая, когда сила фрикционного взаимодействия определяется по гипотезе кулонового трения, и при неизменной величине $k_f \cdot F_N$ величина силы трения зависит лишь от знака скорости. Более хорошее приближение к реальному контактно-му взаимодействию дает использование сложных моделей трения. Здесь будем использовать силовые характеристики, содержащие кулоновое, линейное и кубическое слагаемые. В нижеприводимых расчетах используется семейство характеристик,

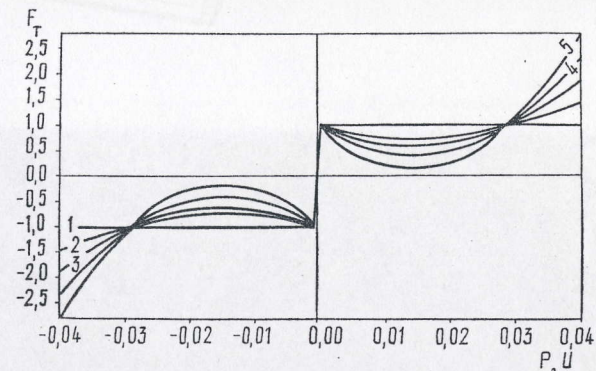


Рис. 3. Семейство силовых характеристик фрикционного взаимодействия $1 + \gamma(1 - ae^{f|x|} - be^{f|v|}) \text{sign } \dot{x}$, $a = 3/7$, $b = 4/7$, $\beta = 10$: 1 — $\gamma = 0$; 2 — $\gamma = 20$; 3 — $\gamma = 40$; 4 — $\gamma = 60$; 5 — $\gamma = 80$

показанных на рис. 3. Используемое аналитическое выражение имеет вид

$$F_T = -k_f F_N \text{sign}(P_T \dot{U}) - k_f F_N (1 - ae^{\beta |P_T \dot{U}|} - be^{-\beta |P_T \dot{U}|}) \gamma \text{sign}(P_T \dot{U}), \quad (20)$$

где $a + b = 1$. В выражении (20) первое слагаемое представляет собой силу кулонового трения, при отсутствии проскальзывания заменяемую кинематическим ограничением вида (2.б), а второе — непрерывную нелинейную зависимость силы трения от скорости скольжения. Расчеты показали, что рассматриваемая УКП обладает положительной особенностью — характеристики ее динамики мало зависят от глубины модуляции нормальной силы, а также от формы силовой характеристики фрикционного взаимодействия. Исследуются характеристики динамики УКП в шаговом режиме [5]: длина шага ψ_{max} и время до первой остановки направленного движения T_{max} . Глубина модуляции нормальной силы характеризуется коэффициентом a , означая отношение амплитуды модуляции со средним значением этой силы, зависимости рис. 4а. Коэффициент γ определяет значение силовой характеристики в точках локальных экс-

тремунов, соответствующие зависимости представлены на рис. 4б. Видно, что глубина модуляции практически не влияет на динамические характеристики, а при увеличении коэффициента γ они изменяются очень незначительно вплоть до значения γ , при котором наступает срыв, т. е. когда УКП, начав движение, не приходит в состояние покоя при снятии синусоидального возбуждения (движение на вогнутом участке силовой характеристики).

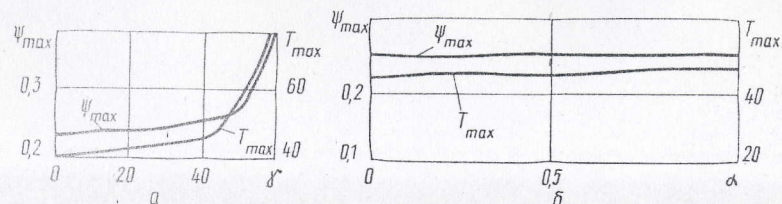


Рис. 4. Зависимости динамических характеристик УКП от глубины модуляции нормальной силы и коэффициента γ силовой характеристики трения при $F_N k_f = 0,019$, $F = F_N k_f / 2$: а — от коэффициента глубины модуляции α при $\gamma = 40$; б — от коэффициента γ при $\alpha = 0$

2. Исследование динамики свободного движения вибродвигателя. Модель вибродвигателя с упругим стержневым вибропреобразователем и жестким выходным звеном массой m_0 представлена на рис. 5. В исходном положении входное звено на

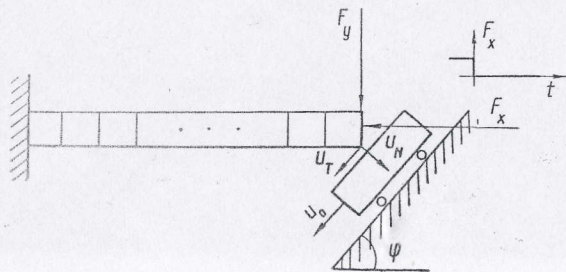


Рис. 5. Конечнoэлементная модель вибродвигателя со стержневым вибропреобразователем

правом конце сжимается продольной силой F_x (обычно сила создается из-за обратного пьезоэффекта в пьезокерамическом входном звене) и прижимается поперечной силой F_y . В момент времени $t=0$ сила F_x снимается, и начинаются упругие колебания вибропреобразователя, причем правый его конец контактирует с выходным звеном. При этом за счет нормальных и тангенциальных сил взаимодействия выходное звено приходит в движение. После затухания колебаний вибропреобразователя выходное звено останавливается. Исследовались временные зависимости движения звеньев и характеристики дина-

мики получаемого таким образом шага выходного звена вибродвигателя.

Строится конечноэлементная модель стержневого вибропреобразователя, работающего на растяжение-сжатие и изгиб [5], при этом каждый узел модели имеет три степени свободы. Матричное дифференциальное уравнение движения системы записывается в виде

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{u}_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{u}_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -F_x(t) \\ F_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где M , C , K — структурные матрицы вибропреобразователя. Для учета контактного взаимодействия наряду с уравнением (21) должны быть рассмотрены кинематические ограничения вида (2.а), (2.б) с матрицами

$$P_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$P_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Масса вибропреобразователя и масса выходного звена принимаются равными, $m = m_0$, поперечная жесткость вибропреобразователя на изгиб k_s принимается существенно меньшей его продольной жесткости k_l , $k_s \ll k_l$, коэффициент сухого трения $k_f = 0,5$. Для представления результатов используются безразмерные величины:

- перемещения конца вибропреобразователя в нормальном и тангенциальном направлениях $\bar{u}_N = \frac{u_N}{u_p}$, $\bar{u}_T = \frac{u_T}{u_p}$, $\bar{u}_0 = \frac{u_0}{u_p}$,
- импульсы нормальных и тангенциальных сил $\bar{S}_N = \frac{S_N}{k_l u_p}$,
- $\bar{S}_T = \frac{S_T}{k_l u_p}$,
- время $\bar{t} = t/T$,
- нормальная сила $\bar{F}_y = \frac{F_y}{F_x}$,

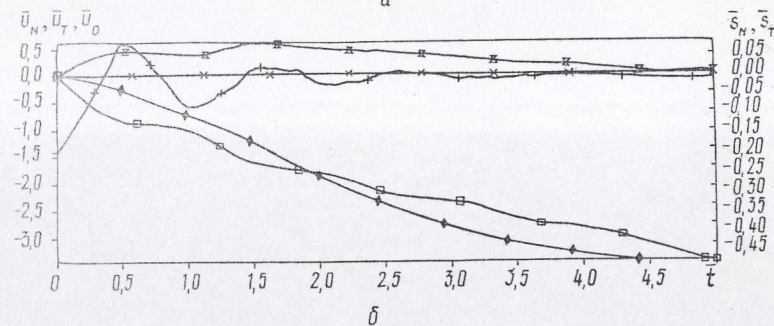
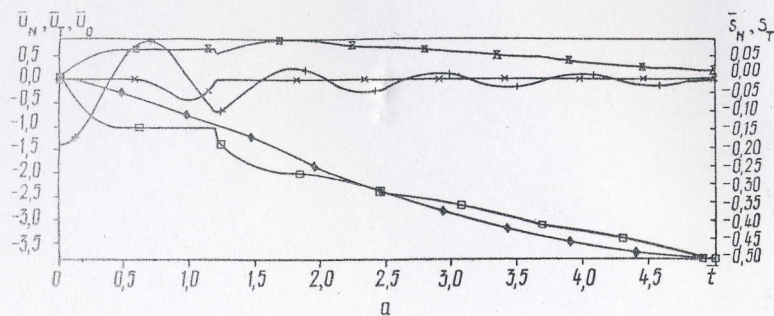


Рис. 6. Временные зависимости перемещений контактной точки вибропреобразователя, выходного звена и импульсов контактных сил при свободном движении вибродвигателя; $\bar{F}_y = 0,075$, $m = m_0$, $k_s \ll k_t$, $k_f = 0,5$

где T — период свободных продольных колебаний вибропреобразователя, u_p — абсолютная величина начального продольного перемещения контактной точки.

На рис. 6 приведены временные зависимости перемещений и импульсов контактных сил для простейшей модели (модель стержня в виде массы на пружине) и для модели из шести КЭ (рис. 6б) при $\bar{F}_y = 0,075$. Анализ временных зависимостей перемещений свидетельствует об устойчивой работе алгоритма численного интегрирования, несмотря на сравнительно большой

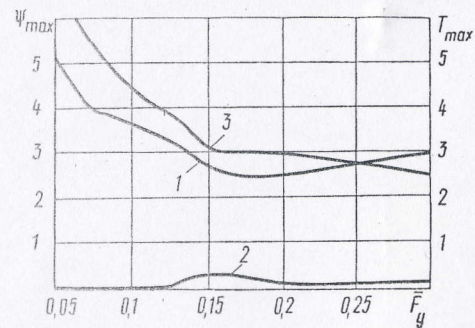


Рис. 7. Зависимости характеристик шага вибродвигателя при свободном движении

шаг (500 точек интегрирования) для скачкообразных нелинейностей. Зависимости характеристик шага вибродвигателя от силы \bar{F}_y приведены на рис. 7, причем характеристика ψ_p означает отклонение перемещения выходного звена после его окончательной остановки от перемещения величиной в момент первой остановки.

Выводы. Алгоритм численного интегрирования уравнений динамики конструкции с парами нормального и фрикционного взаимодействия получен в виде расширения обобщенного метода Ньюмарка, применяя метод интегрирования динамических систем с односторонними кинематическими ограничениями. Если трение в контактной паре кулоново и контактная пара в конструкции одна, на каждом шаге интегрирования величины контактных сил определяются, не прибегая к итерационному расчету. Алгоритм также применим к системам со сложными характеристиками трения, представляющими характеристику в виде суммы кулоновой характеристики и непрерывной нелинейной функции скоростей. При помощи разработанных программ исследованы реальные механизмы шаговых микроперемещений в виде управляемых контактных пар и свободного движения вибродвигателя.

Список использованной литературы

1. БАРАУСКАС Р. А. Прямое численное интегрирование уравнений динамики упругих механических систем с односторонними кинематическими ограничениями. I. Методы // Вибротехника. 1992. № 67.
2. БАРАУСКАС Р. А. Прямое численное интегрирование уравнений динамики упругих механических систем с односторонними кинематическими ограничениями. II. Расчет систем с парами прямого удара // Вибротехника. 1992. № 67.
3. КРАГЕЛЬСКИЙ И. В., ГИТИС Н. В. Фрикционные автоколебания. М.: Наука, 1987. 183 с.
4. УЛЬТРАЗВУК / Под ред. И. П. Голямина. М.: Сов. энциклопедия, 1979. 100 с.
5. БАРАУСКАС Р. А., КУЛЬВЕТИС Г. П., РАГУЛЬСКИС К. М. Расчет и проектирование вибродвигателей. Л.: Машиностроение, 1984. 99 с.

Каунасский технологический университет

Поступило
11.09.1989